初期データの特異極限に対する非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動(スペクトル・散乱理論とその周辺)

北, 直泰

数理解析研究所講究録
第 1563 巻 2007 年 148-156

初期データの特異極限に対する 非線形シュレーディンガー方程式の解の挙動

北　直泰（宮崎大学 教育文化学部）

1 Introduction

この講演では次のような非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u_\varepsilon = -\partial_x^2 u_\varepsilon + \lambda\mathcal{N}(u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0,x) = \mu_0\varphi_\varepsilon(x) + \mu_1\varphi_\varepsilon(x-a). \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ であり, $u(t,x)$ は複素数の値をとる未知関数である. また, 非線形項の係数 λ は実数であり, 非線形項 $\mathcal{N}(u)$ はゲージ不変性のあるベキ型のもの, つまり

$$\mathcal{N}(u) = |u|^{p-1}u \quad (1<p<3)$$

とする. 初期データは, 急減少関数にスケール変換を施したものであり, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $0<\varepsilon<1$ である. 重ね合わせの係数 μ_0, μ_1 は複素数とする. パラメータ ε が 0 から離れている場合, 数学的な (1.1) の取り扱いについては, 時間局所解の存在から始まって時間大域解の存在および大きな時刻における解の漸近挙動など多岐にわたっている [2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 21]. それらのほとんどは方程式が有する保存量 (L^2 ノルムやエネルギー) やスケーリングによる不変性そして非線形評価に関わる要請から Sobolev 空間 $H^s(\mathbf{R})$ $(s\geq 0)$ の枠組みで議論が進められている. しかし, ここではパラメータ ε を 0 に近づけたときの解の挙動を調べたいので, ε が小さくなるにつれて初期データが既存の関数空間の枠組みに収まらなくなるという困難が生ずる.

次にパラメータ付き初期値問題を考察しようと思った工学的な動機について説明する. 初期値問題 (1.1) は非線形ファイバー光学の分野でよく登場するもので, 変数 t は光ファイバーに沿った位置を表すパラメータであり, 変数 x はパルスの形状を関数によって与えるための時刻パラメータを表している [1]. また, $u(t,x)$ は波の包絡線を表す (より正確には絶対値を取って $|u(t,x)|$ が包絡線を表している). この初期値問題において, $\varepsilon\in(0,1]$ を十分小さく取ることは初期データ（＝入射波）が鋭いピークを持つことを意味している. 実際, 超関数 $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ の意味で $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(0,x) = \left(\int\varphi(x)\,dx\right)(\mu_0\delta_0+\mu_1\delta_a)$ となっている. (ここで, δ_a は $x=a$ に台を持つ δ 関数である.) このように初期データに鋭いパルス状の関数を与えて解の様子を観察しようと試みた動機は, 光通信におけるある問題から湧き出てきたものである. 光による通信が実用化され始めている昨今, できるだけ遠くまで安価に

情報を伝達することが専門家の興味の対象となっているわけであるが, その際関心が寄せられているのは「パルス状の波形を保ったまま媒質中を長距離伝送できるか否か」という問題である [9]. 現在のところこの問題を克服する方策として, 伝送途中にいくつもの波形復元装置や増幅装置を設置するという類のものが採用されている. 一方, 別の方策として soliton による情報伝達も考案されている. soliton は媒質中を伝播してもなかなかその波形が崩れない波として知られているので, soliton 通信が実用化されれば現行の通信方法から復元装置や増幅装置を大幅に省くことができ経費の削減につながる. しかし, soliton とはいえ現実的にはいくらかの摂動が加わった状態で伝送せざるをえないため, 摂動に対する soliton の安定性を調べておく必要がある. この件に関して実は数学的に 1-soliton の微小摂動に対する（軌道）安定性の条件がいろいろ調べられている [4, 7, 8, 16, 17, 18]. ところが, 現実は soliton のような理想的な波形を僅かナノ秒・ピコ秒の世界で人工的に生成することは非常に難しく, 送信の際に大きな摂動が混じり込むことがよくあるようで, それが伝播中の波形を崩す原因の 1 つになっている. さらに, 多くの情報を伝達するには多数のパルスを入射させる必要があるのだが, その際パルス同士が相互作用し合って波形を崩すこともあるようだ. これらの理由によって, 今のところまだ soliton による通信は実用化に至っていないようである.

この講演では, soliton とはかけ離れたパルス状の入射波に対して, そして複数のパルスを入射させた場合について媒質伝播中の波形変化を数学的に観察することを目的としている. 以下の Theorem 1.1 と Theorem 1.2 を見るとわかるのだが, 結論を先に言えば, 入射波の形状を“いい加減に”尖らせても波は媒質内を伝播する途中でどんどん潰れてしまう.

Theorem 1.1 ($u(0,x)=\mu_0\varphi_\varepsilon(x)$ の場合) ある $T>0$ に対して, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき, $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ の意味で

$$u_\varepsilon(t,x)\longrightarrow A(t)U(t)\delta_0 \quad (0<t<T)$$

が成り立つ. ただし, $U(t)=\exp(it\partial_x^2)$ であり, 振幅 $A(t)$ は次の常微分方程式の解である.

$$\begin{cases} i\dfrac{dA(t)}{dt}=(4\pi t)^{-(p-1)/2}\lambda\mathcal{N}(A(t)), \\ A(0)=\mu_0\displaystyle\int\varphi(x)\,dx. \end{cases} \tag{1.2}$$

Remark. Theorem 1.1 の主張に見受けられる極限関数 $A(t)U(t)\delta_0$ は実は初期データとして $u(0,x)=\mu_0\left(\int\varphi(x)\,dx\right)\delta_0$ を持つような (1.1) の解になっている. δ 関数を初期データに持つ非線形 Schrödinger 方程式については, Kenig-Ponce-Vega [14] により次のような結果が得られている. 「$3\leq p$ のとき, $u(0,x)=\delta_0$ となる (1.1) の解は $C([0,T];\mathcal{S}'(\mathbf{R}))$ の空間において存在しないか, 存在したとしても 2 つ以上ある.」本研究の場合, 劣臨界ベキ ($p<3$) の非線形項で考察しており, 初期データが δ 関数のように特異な状況でも (1.1) の解が存在する. それは, 常微分方程式 (1.2) の右辺にある時刻 t の特異性が $t=0$ 付近

で可積分程度になることからも察しがつくであろう.

Remark. Theorem 1.1 の $A(t)$ は常微分方程式 (1.2) を解くことによって具体的に

$$A(t)=\sqrt{2\pi}\mu_0\widehat{\varphi}(0)\exp\left(\frac{2\lambda|\sqrt{2\pi}\mu_0\widehat{\varphi}(0)|^{p-1}}{i(3-p)}|4\pi t|^{-(p-1)/2}t\right)$$

と書き下すことができる. ここで, $\widehat{\varphi}$ は φ の Fourier 変換を表す. 極限関数は $A(t)U(t)\delta_0=(4\pi it)^{-1/2}A(t)\exp(ix^2/4t)$ のように時刻 t について減衰する表現を持つ. 物理学的に考察すると, 入射波の先鋭度が強すぎるとパルスは媒質中を伝播するにしたがい潰れてしまうことを意味する. これは初期データのスケールの取り方が“縦方向”にあまりにも大きく引き伸ばし過ぎていることが原因のようである. 定性的により詳しく述べると, ε が小さくなると初期データの特異性が強くなるため, 高い周波数成分が入射波に多く含まれることになり, これらの高周波数成分がラプラシアン $-\partial_x^2$ で表される線形分散効果によって (非線形性に打ち勝って) 遠くへ逃げてしまうから波形が潰れてしまうのである.

次に初期データが2つのピークを持つ場合について結果を紹介する.

Theorem 1.2 ($u(0,x)=\mu_0\varphi_\varepsilon(x)+\mu_1\varphi_\varepsilon(x-a)$ の場合) ある $T>0$ に対して, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき, $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ の意味で

$$u_\varepsilon(t,x)\longrightarrow\sum_{k\in\mathbf{Z}}A_k(t)U(t)\delta_{ka}\quad(0<t<T)\tag{1.3}$$

が成り立つ. ここで, $U(t)=\exp(it\partial_x^2)$ であり, 振幅 $A_k(t)$ は次の常微分方程式系の解である.

$$\begin{cases} i\dfrac{dA_k(t)}{dt}=(4\pi t)^{-(p-1)/2}\lambda\mathcal{N}_k(\{A_j(t)\}), \\ A_k(0)=\mu_k\displaystyle\int\varphi(x)\,dx \textit{ if } k=0,1, \textit{ and } =0 \textit{ otherwise.}\end{cases}\tag{1.4}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_k(\{A_j(t)\}) &= (2\pi)^{-1}e^{-i(ka)^2/4t}\langle\mathcal{N}(\sum_j e^{-ij\theta}e^{i(ja)^2/4t}A_j(t)),\ e^{-ik\theta}\rangle_\theta, \\ \langle f(\theta),g(\theta)\rangle_\theta &= \int_0^{2\pi}f(\theta)\overline{g(\theta)}\,d\theta\end{aligned}$$

である.

Remark. 非線形方程式の解 $u_\varepsilon(t,x)$ を線形の解作用素 $U(t)$ で引き戻したもの, つまり $U(-t)u_\varepsilon(t)$ に注目しよう. $t=0$ のとき $U(0)u_\varepsilon(0)$ は2つのピークをもつ関数であるのに, $t\neq 0$ では十分小さな ε に対して $U(-t)u(t)$ が数多くのピークを持つ関数とみなせること

が (??) を見るとわかる. この性質は線形方程式では起こりえないもので, 非線形特有の性質であると言える. また, Theorem 1.2 の証明を見ればわかることであるが, 初期データは $\varphi(x)$ を 2 つだけ加えたものでなくても, $u(0,x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \mu_k \varphi_\varepsilon(x - ja)$ のように無限個加えたような形をしていても, (1.3) と同様の結論を導くことが可能である. ただし, この場合は重ね合わせの係数 μ_j に $\sum_{j\in\mathbf{Z}}(1+|j|)^2|\mu_j|^2 < \infty$ のような減衰条件を課さねばならない.

2 Theorem 1.1 の証明（Outline）

まず, $u_\varepsilon(t)(= u_\varepsilon(t,x))$ が $0 < \varepsilon < 1$ のとき $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ において有界であることを示すために, $u(t) = U(t)(U(-t)u_\varepsilon(t))$ と見て $U(-t)u_\varepsilon(t)$ の様子を観察する. $U(-t)u_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)$ とおく. すると (1.1) より $v_\varepsilon(t)$ は次の関係式を満たす.

$$\begin{cases} i\partial_t v_\varepsilon = \lambda U(-t)\mathcal{N}(U(t)v_\varepsilon), \\ v_\varepsilon(0) = \mu_0\varphi_\varepsilon(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで, $U(t) = MD\mathcal{F}M$ のように分解できることに注意する. ただし, $Mf(t,x) = e^{ix^2/4t}f(t,x)$, $Df(t,x) = (2it)^{-1/2}f(t,x/2t)$ であり, $\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int e^{-i\xi x}f(x)\,dx$ (Fourier 変換) である. この分解を (2.1) に適用し, 非線形項のゲージ不変性を利用して式変形を進めると

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{v}_\varepsilon = \lambda|2t|^{-(p-1)/2}\mathcal{F}M^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{N}(\mathcal{F}M\mathcal{F}^{-1}\hat{v}_\varepsilon), \\ \hat{v}_\varepsilon(0,\xi) = \mu_0\hat{\varphi}(\varepsilon\xi). \end{cases}$$

が得られる. $\hat{f}(\xi)$ は $f(x)$ の Fourier 変換である. さらに ξ 方向のスケール変換 $\hat{w}_\varepsilon(t,\xi) = \hat{v}_\varepsilon(t,\xi/\varepsilon)$ を施すことによって, 次のような関係式が得られる.

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{w}_\varepsilon = \lambda|2t|^{-(p-1)/2}\mathcal{F}M_\varepsilon^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{N}(\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}\hat{w}_\varepsilon), \\ \hat{w}_\varepsilon(0,\xi) = \mu_0\hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで, $M_\varepsilon = e^{i\varepsilon^2x^2/4t}$ および $M_\varepsilon^{-1} = e^{-i\varepsilon^2x^2/4t}$ である. 関係式 (2.2) の扱いやすいところは, $\varepsilon \longrightarrow 0$ のとき, $M_\varepsilon \longrightarrow 1$ となるので, ε について特異な項が無くなっている点にある. この関係式 (2.2) を常微分方程式における通常の解法で解く. つまり, (2.2) を積分方程式に書き換えて, 関数空間 $C([0,T];H^1(\mathbf{R}))$ で縮小写像の原理を適用する. 詳細は省略するが, この議論の末に次の補題を得る.

Lemma 2.1 $\varepsilon \in (0,1]$ に依存しない $T > 0$ を選ぶことができて次の 2 つが成り立つ.

(1) (2.2) の解 $\hat{w}_\varepsilon(t,\xi) \in C([0,T];H^1(\mathbf{R})) \cap C^1((0,T];H^1(\mathbf{R}))$ が唯一つ存在する.

(2) $\varepsilon \to 0$ のとき $\widehat{w}(t,\xi) \in H^1(\mathbf{R})$ が存在して, $\widehat{w}_\varepsilon(t,\xi) \longrightarrow \widehat{w}(t,\xi)$ が $C([0,T]; H^{1-\sigma}(\mathbf{R}))$ $(0 < \sigma \ll 1)$ の意味で成り立つ. ここで, $w(t,\xi)$ は次のような常微分方程式の解である.

$$\begin{cases} i\partial_t \widehat{w} = \lambda |2t|^{-(p-1)/2} \mathcal{N}(\widehat{w}), \\ \widehat{w}(0,\xi) = \mu_0 \widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{2.3}$$

以上の準備のもとで Theorem 1.2 の証明に移ろう.

(Theorem 1.1 の証明) Lemma 2.1 より, $\varepsilon \to 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}_\varepsilon(t,\varepsilon\cdot) - \widehat{w}(t,\varepsilon\cdot)\|_{L^\infty} &= \|\widehat{w}_\varepsilon(t,\cdot) - \widehat{w}(t,\cdot)\|_{L^\infty} \\ &\le C\|\widehat{w}_\varepsilon(t,\cdot) - \widehat{w}(t,\cdot)\|_{H^{1-\sigma}} \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

なので, $\varepsilon \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) &= U(t)\mathcal{F}^{-1}[\widehat{w}_\varepsilon(t,\varepsilon\xi)] \\ &= U(t)\mathcal{F}^{-1}[\widehat{w}(t,\varepsilon\xi)] + U(t)\mathcal{F}^{-1}[\widehat{w}_\varepsilon(t,\varepsilon\xi) - \widehat{w}(t,\varepsilon\xi)] \\ &\longrightarrow U(t)\mathcal{F}^{-1}\widehat{w}(t,0) \end{aligned}$$

が $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ の意味で成り立つ. ここで, $\mathcal{F}^{-1}\widehat{w}(t,0) = \sqrt{2\pi}\widehat{w}(t,0)\delta_0$ であることに注意し, $A(t) = \sqrt{2\pi}\widehat{w}(t,0)$ とおくことで, Theorem 1.1 を得る. □

3 Theorem 1.2 の証明 (Outline)

前の節で $\widehat{w}_\varepsilon$ の関係式 (2.2) を導く方法を今の場合でも適用すると

$$\begin{cases} i\partial_t \widehat{w}\varepsilon = \lambda |2t|^{-(p-1)/2} \mathcal{F} M_\varepsilon^{-1} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{N}(\mathcal{F} M_\varepsilon \mathcal{F}^{-1} \widehat{w}_\varepsilon) \\ \widehat{w}_\varepsilon(0,\xi) = \mu_0 \widehat{\varphi}(\xi) + \mu_1 e^{-i\alpha\xi/\varepsilon} \widehat{\varphi}(\xi) \end{cases} \tag{3.1}$$

が得られる. 前節で取り扱った δ 関数が 1 つの場合と異なるのは, (3.1) の初期データに $e^{-i\alpha\xi/\varepsilon}$ のように特異な因子が含まれている点である. この因子が存在するために小さな ε に対する $\widehat{w}_\varepsilon$ の一様評価を得る際に困難が生じてしまう. この困難を回避するために $\widehat{w}_\varepsilon(t,\xi)$ を

$$\widehat{w}_\varepsilon(t,\xi) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} C_{\varepsilon,j}(t,\xi) e^{-ij\alpha\xi/\varepsilon} \tag{3.2}$$

のように $\{e^{-ij\alpha\xi/\varepsilon}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ で展開した形式を採用する. この展開には ε に関して特異な影響は $\{e^{-ij\alpha\xi/\varepsilon}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ の方にすべて押し着せて, 展開係数 $C_{\varepsilon,j}(t,\xi)$ の方に ε についての一様評価を期待しようという発想が含まれている. さて, $C_{\varepsilon,j}(t,\xi)$ の評価を得るために (3.2) を

(3.1) に代入するわけであるが, その際非線形項の取り扱いが重要になる. この非線形項の取り扱いについては次の Lemma 3.1 が有用である. 尚, Lemma 3.1 の中で新しい数列空間 $\ell^2_1(H^1)$ が登場するが, これは以下のようなノルムを有する数列空間である.

$$\|\{C_j(\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^2_1(H^1)}=\left(\sum_{j\in\mathbf{Z}}(1+|j|)^2\|C_j(\cdot)\|^2_{H^1}\right)^{1/2}$$

Lemma 3.1 $\widehat{w}_\varepsilon(t,\xi)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}C_{\varepsilon,j}e^{-ija\xi/\varepsilon}$ に対して, $\{C_{\varepsilon,j}(t,\xi)\}_{j\in\mathbf{Z}}\in L^\infty([0,T];\ell^2_1(H^1))$ とする. このとき,

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}\widehat{w}_\varepsilon)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}B_{\varepsilon,k}(t,\xi)e^{i(ka)^2/4t}e^{-ika\xi/\varepsilon} \tag{3.3}$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned}B_{\varepsilon,k}(t,\xi)&=(2\pi)^{-1}e^{-i(ka)^2/4t}\langle\mathcal{N}(f(t,\xi,\theta),e^{-ik\theta})\rangle_\theta,\\ f(t,\xi,\theta)&=\sum_{j\in\mathbf{Z}}e^{-ij\theta}e^{i(ja)^2/4t}[\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}C_{\varepsilon,j}](t,\xi-\varepsilon\frac{ja}{2t})\end{aligned}$$

である.

(Lemma 3.1 の証明) まず, Fourier 変換の基本的な性質を利用することによって,

$$\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}\widehat{w}_\varepsilon=\sum_j e^{-ija\xi/\varepsilon}e^{i(ja)^2/4t}[\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}C_{\varepsilon,j}](t,\xi-\varepsilon\frac{ja}{2t})$$

と書ける事に注意する. ただし, $\theta=a\xi/\varepsilon$ とおくことにより, 非線形項

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}\widehat{w}_\varepsilon)=\mathcal{N}(\sum_j e^{-ij\theta}e^{i(ja)^2/4t}[\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}C_{\varepsilon,j}](t,\xi-\varepsilon\frac{ja}{2t}))$$

は θ について周期 2π の周期関数とみなすことができる. そこで Fourier 級数展開すると

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}M_\varepsilon\mathcal{F}^{-1}\widehat{w}_\varepsilon)=\sum_k\widetilde{C}_{\varepsilon,k}(t,\xi)e^{-ik\theta}$$

と書くことができる. ここで, $\widetilde{C}_{\varepsilon,k}(t,\xi)$ は Fourier 係数である. $\widetilde{C}_{\varepsilon,k}=e^{i(ka)^2/4t}B_{\varepsilon,k}$ と書き直し, $\theta=a\xi/\varepsilon$ を代入しなおすことで Lemma 3.1 が得られる. □

$\widehat{w}_\varepsilon$ の展開表現 (3.2) を (3.1) に代入し, Lemma 3.1 を適用すると,

$$\sum_k i\partial_t C_{\varepsilon,k}(t,\xi)e^{-ik\xi/\varepsilon}=\lambda|2t|^{-(p-1)/2}\sum_k[\mathcal{F}M_\varepsilon^{-1}\mathcal{F}^{-1}B_{\varepsilon,k}](t,\xi+\varepsilon\frac{ka}{2t})e^{-ika\xi/\varepsilon}$$

となる. 両辺の係数に相当する部分を比較することで, 次のような $\{C_{\varepsilon,k}(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ の常微分方程式系が得られる.

$$\begin{cases} i\partial_t C_{\varepsilon,k}(t,\xi) = \lambda|2t|^{-(p-1)/2}[\mathcal{F}M_\varepsilon^{-1}\mathcal{F}^{-1}B_{\varepsilon,k}](t,\xi+\varepsilon\frac{ka}{2t}), \\ C_{\varepsilon,k}(0,\xi) = \mu_k\widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{3.4}$$

(3.4) の解の性質については以下の Lemma のとおり (証明の詳細は省く).

Lemma 3.2 $\varepsilon\in(0,1)$ に依存しないある $T>0$ に対して, 次の２つの主張が成り立つ.

(1) (3.4) の解 $\{C_{\varepsilon,k}(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}\in C([0,T];\ell_1^2(H^1))\cap C^1((0,T];\ell_1^2(H^1))$ が唯 *1* つ存在する.

(2) $\varepsilon\to0$ のとき $\{C_k(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}\in\ell_1^2(H^1)$ が存在して, $\{C_{\varepsilon,k}(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}\to\{C_k(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が $C([0,T];\ell_1^2(H^{1-\sigma}))$ $(0<\sigma\ll1)$ の意味で成り立つ. ここで, $C_k(t,\xi)$ は次のような常微分方程式系の解である.

$$\begin{cases} i\partial_t C_k(t,\xi) = \lambda|2t|^{-(p-1)/2}B_{0,k}(t,\xi), \\ C_k(0,\xi) = \mu_0\widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{3.5}$$

ただし, $B_{0,k}$ は *Lemma 3.1* の $B_{\varepsilon,k}$ に $\varepsilon=0$ を形式的に代入したものである.

以上の準備のもとで Theorem 1.2 の証明に移ろう.

(Theorem 1.2 の証明) Lemma 3.2 より,

$$\begin{aligned} &\|\sum_k C_{\varepsilon,k}(t,\varepsilon\xi)e^{ika\xi}-\sum_k C_k(t,\varepsilon\xi)e^{ika\xi}\|_{L^\infty} \\ =\;& \|\sum_k C_{\varepsilon,k}(t,\xi)e^{ika\xi/\varepsilon}-\sum_k C_k(t,\xi)e^{ika\xi/\varepsilon}\|_{L^\infty} \\ \le\;& C\|\{C_{\varepsilon,k}(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}-\{C_k(t,\xi)\}_{k\in\mathbf{Z}}\|_{\ell_1^2(H^{1-\sigma})} \\ \to\;& 0 \end{aligned}$$

が従うので, $\varepsilon\to0$ のとき $\mathcal{S}'$ の意味で

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) &= U(t)\mathcal{F}^{-1}\sum_k C_{\varepsilon,k}(t,\xi)e^{-ika\xi} \\ &\to U(t)\mathcal{F}^{-1}\sum_k C_k(t,0)e^{-ika\xi} \end{aligned}$$

が得られる. ここで, $\mathcal{F}^{-1}\sum_k C_k(t,0)e^{-ika\xi}=\sum_k\sqrt{2\pi}C_k(t,0)\delta_{ka}$ に注意し, $\sqrt{2\pi}C_k(t,0)=A_k(t)$ と置き換えれば Theorem 1.2 が得られる. □

参考文献

[1] G.P. Agrawal, "*Nonlinear fiber optics (second edition)*", Academic Press (1995).

[2] T. Cazenave, "An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations," Textos de Métodos Matemáticos **22**, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 1989.

[3] T. Cazenave and F.B. Weissler, "*The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*", Nonlenear Anal. TMA, **14**(1990), 807–836.

[4] R. Fukuizumi and M. Ohta, "*Stability of standing waves for nonlinear Schrodinger equations with potentials*", Differential Integral Equations **16** (2003), 111–128.

[5] J. Ginibre and G. Velo, "*On a class of nonlinear Schrö dinger equations*", J. Funct. Anal. **32**(1979), 1–71.

[6] J. Ginibre and G. Velo, "*The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation*", Math. Z. **189**(1985), 487–505.

[7] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, "*Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*", J. Funct. Anal. **74** (1987), 160–197.

[8] M. Grillakis, J. Shatah and W. Strauss, "*Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II*", J. Funct. Anal. **94** (1990), 308–348.

[9] 長谷川晃, 非線形波動の物理と応用ー光ソリトンによる超高速光通信, インターネットホームページ(http://wwwsoc.nii.ac.jp/jps/jps /butsuri/50th/noframe/50(11)/50th-p806.html).

[10] N. Hayashi, "*Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations,*" Manuscripta Math. **55**(1986), 171–190.

[11] T. Kato, "*On nonlinear Schrödinger equations*", Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46**(1986), 113–129.

[12] T. Kato, "*Nonlinear Schrödinger equations,*" in "Schrödinger Operators" (H. Holden, A. Jensen, Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1989.

[13] T. Kato, "*On Schrödinger equations. II. H^s-solutions and unconditional well-posedness,*" J. d'Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[14] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, "*On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*", Duke Math. J. **106**(2001), 627–633.

[15] M. Nakamura and T. Ozawa, "*Nonlinear Schrösinger equations in the Sobolev space of critical order*," J. Funct. Anal. **155**(1998), 364–380.

[16] M. Ohta, *Stability of stationary states for the coupled Klein-Gordon-Schrodinger equations*", Nonlinear Anal. **27** (1996), 455–461.

[17] M. Ohta, "*Stability of solitary waves for coupled nonlinear Schrodinger equations*", Nonlinear Anal. **26** (1996), 933–939.

[18] M. Ohta, "*Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrodinger equations with double power nonlinearity*", Kodai Math. J. **18** (1995), 68–74.

[19] H. Pecher, "*Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s*," Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **67**(1997), 259–296.

[20] Y. Tsutumi, "*L^2 solutions for nonlinear Scrödinger equations and nonlinear groups*", Funk. Ekva. **30**(1987), 115–125.

[21] Y. Tsutsumi, "*Global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations*," Nonlinear Anal. TMA **11**(1987), 1143–1154.